DAHAの多項式表現の組成因子とcrystallized decomposition numberについて(組合せ論的表現論の世界)

榎本, 直也

数理解析研究所講究録
1497 巻 2006 年 32-51

DAHAの多項式表現の組成因子と crystallized decomposition number について

榎本 直也 (Naoya Enomoto)

京都大学数理解析研究所
Research Institute for Mathematical Sciences,
University of Kyoto
henon@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 Introduction

1.1 DAHAの多項式表現と笠谷予想

I.Cherednik によって導入された double affine Hecke 環 (DAHA) は，2つのパラメータ ζ, τ を持つ．GL_n 型 DAHA は，A 型 Iwahori-Hecke 環 $H_n = \langle T_1, \cdots, T_{n-1} \rangle$ と2つの Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}], \mathbb{C}[Y_1^{\pm 1}, \cdots, Y_n^{\pm 1}]$ を部分環として持っている．また，Dunkl 作用素によって定義される Laurent 多項式環 $\mathbb{C}(\zeta^{1/2}, \tau)[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$ 上の忠実な表現を持っており，これは多項式表現と呼ばれている．ζ, τ が generic な場合，多項式表現は，non-symmetric Macdonald 多項式と呼ばれる直交多項式を基底に持ち，既約である．笠谷昌弘氏 (京大理) は，[笠谷] において，パラメータ ζ, τ が $\zeta^\ell \tau^r = 1$ という関係式を持つ場合を考察した．この場合，多項式表現は一般には既約とはならない．笠谷氏は，"multi-wheel condition" と呼ばれる条件を満たす多項式を使って，多項式表現の中に部分表現の増大列を構成し，これが組成列になっているであろうと予想した [笠谷, Conjecture 6.4].

ここでは，

$$\zeta, \tau \text{は} 1 \text{のベキ根ではなく}, (\ell, r) = 1 \text{かつ} \ell \neq 2$$

の場合に，この予想を証明することができたので，報告したい．証明の方針は，次に述べる諸結果を通じて，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_\ell})$ の Fock 空間の upper 大域基底の計算に帰着するものである．

1.2 DAHA の退化と v-Schur 環，LLT-有木型定理

DAHA には，degenerate DAHA，rational DAHA と呼ばれている 2 つの退化版があることが知られている．これらは，h というパラメータを持ち，dgeneraret DAHA は，$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$，$\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$，$\mathbb{C}[Y_1^{\pm1},\cdots,Y_n^{\pm1}]$ を部分環とし，rational DAHA は，$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$，$\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$，$\mathbb{C}[y_1,\cdots,y_n]$ を部分環として持っている．DAHA とその退化版には，それぞれ"category $\mathcal{O}$"と呼ばれる表現の圏が存在し，標準加群と呼ばれる表現を含んでいる．多項式表現はその特別な場合にあたる．特に，rational DAHA には n の分割によって添え字付けられた標準加群 $\Delta(\lambda)$ が存在する．

他方，v-Schur 環は，Iwahori-Hecke 環の permutation module の endmorphism ring として構成され [DJ]，$U_v(\mathfrak{gl}_n)$ の商となっていることが知られている [BLM]．v が 1 のベキ根でないときには，Weyl 加群と呼ばれる n の分割で添え字付けられた既約表現の完全代表系を持つ (e.g. [Mat])．

DAHA のパラメータを $\zeta^\ell\tau^r=1$ と特殊化し，$h=r/\ell$ と取る．このとき，DAHA とその退化版の category $\mathcal{O}$ と v-Schur 環の表現の圏との間には次のような関係がある．

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{category } \mathcal{O}_{(\ell,r)}} \arrow[d, dotted, dash, "(1)"] & & \\
\boxed{\text{category } \mathbb{O}^{\deg}_{r/\ell}} & & \\
\boxed{\text{category } \mathbb{O}^{\mathrm{rat}}_{r/\ell}} \arrow[u, hook, "(2)"] \arrow[rr, phantom, "\underset{(3)}{\cong}"] & & \boxed{\text{category } \mathbb{S}(n)\text{-mod}}
\end{tikzcd}$$

(1) **Varagnolo-Vasserot's equivalence** [VV2]
DAHA の category $\mathcal{O}_{(\ell,r)}$ と degenerate DAHA の category $\mathbb{O}^{\deg}_{r/\ell}$ は圏同値ではない．しかし，Y に関する weight が χ の拡大 affine Weyl 群軌道に属する表現だけを考えた充満部分圏 ${}^{\chi}\mathcal{O}_{(\ell,r)}$, ${}^{\chi}\mathbb{O}^{\deg}_{r/\ell}$ を考えると，χ がある整数性の条件を満たせば圏同値となる．これは G.Lusztig による affine Hecke 環に関する結果 [Lus] の一般化になっている．

(2) **T. Suzuki's embedding** [鈴木]
rational DAHA $\mathbb{H}^{\mathrm{rat}}$ は degenerate DAHA $\mathbb{H}^{\deg}$ に埋め込むことができ，誘導函手 $\mathbb{H}^{\deg}\otimes_{\mathbb{H}^{\mathrm{rat}}}-$ は，fully faithful かつ exact になる．さらに，$\mathbb{O}^{\mathrm{rat}}_{r/\ell}$ の標準加群を $\mathbb{O}^{\deg}_{r/\ell}$ 標準加群に移す．

(3) **R. Rouquier's equivalence** [Rou]
$\ell\neq2$ のとき，$\mathbb{O}^{\mathrm{rat}}_{r/\ell}$ と $v=\sqrt[\ell]{1}$ と特殊化した v-Schur 環の表現の圏 $\mathbb{S}(n)$-mod とは圏同値になる．さらに，$\mathbb{O}^{\mathrm{rat}}_{r/\ell}$ の標準加群 $\Delta(\lambda)$ は Weyl 加群 $W^{\lambda'}$ に移される．(λ' は λ の転置を表す．)

ここまでのことによって，パラメータの特殊化のもとでDAHAの多項式表現は，v-Schur環の Weyl 加群 $W^{(1^n)}$ に移されることがわかる．

A 型 Hecke 環と対称群の分解係数に関する LLT 予想が，有木 [有木 1] によって解決されたことにより，Hecke 環の modular 表現論は量子群の大域基底と深く結びついている．この結果は，Varagnolo-Vasserot により，v-Schur 環の modular 表現の場合にも拡張されている．

(4) **LLT-有木型定理** [VV1]
$v = \sqrt[\ell]{1}$ のとき，v-Schur 環の分解係数（crystallized decomposition number）$[W^\lambda, L^\mu]$ は，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_\ell)$ の Fock 空間における大域基底と結晶基底の変換行列 (を $q=1$ に特殊化した行列) によって記述される．

筆者は，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_\ell)$ の Fock 空間で，$|(n)\rangle$ の upper 大域基底による展開を具体的に計算することで，

$$\langle (n)| = \sum_{i=0}^{N} q^i G^{\mathrm{up}}(\mu_i^{(n)}), \quad (\text{ここで } N = [r/\ell])$$

となることを証明した．このことから分解定数が

$$[W^{(1^n)} : L^\mu] = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu' = \mu_i^{(n)} (0 \le i \le N) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となることが導かれる．(分割 $\mu_i^{(n)}$ の定義は §4 を参照．) これは，$\ell = 2$ でも成り立つ結果である．しかし，(3) の Rouquier による圏同値が $\ell \neq 2$ でしか示されていないので，この結果からは，DAHA の多項式表現の組成因子については，$\ell \neq 2$ の場合にしかわからない．笠谷氏の結果により，パラメータを特殊化した DAHA の多項式表現には，$N = [r/\ell]$ 個以上の組成因子が存在することがわかるので，筆者の結果と合わせると，組成因子が丁度 N 個であることがわかり，予想が証明できたことになる．

Remark 1. 実は，すでに宮地兵衛氏 [宮地] によって，$[W^{(1^n)} : L^\mu]$ は計算されていることがわかった [宮地, Lemma 12.2.4,Corollary 12.2.6]．筆者の計算は q-分解係数を計算して，$q \to 1$ と特殊化する方法なので，宮地氏の結果の別証明となっているが，笠谷氏の予想を証明するためには，宮地氏の結果で十分である．この報告の中で本質的に新しい部分は，q-分解係数を計算した部分のみである．これは宮地氏の予想 [宮地, Conjecture 12.2.19] の証明になる．

謝辞 本研究に関し，柏原正樹先生，有木進先生ならびに鈴木武史氏，桑原敏郎氏，笠谷昌弘氏に感謝致します．DAHA やその退化に関する諸結果および分解係数，大域基底に関する諸結果について御教示頂き，有益な議論をして頂きました．また，先行研究について御教示頂いた宮地兵衛氏に感謝致します．

また，研究集会「組み合わせ論的表現論の世界」で講演の機会を与えて頂いた水川裕司氏に感謝致します．

2 DAHAの多項式表現と笠谷予想

2.0 affine root system と extended affine Weyl群

$n+2$ 次元の $\mathbb{C}$-ベクトル空間

$$\mathfrak{h}=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{C}\varepsilon_i^\vee\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d,\quad \mathfrak{h}^*=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{C}\varepsilon_i\oplus\mathbb{C}\Lambda\oplus\mathbb{C}\delta$$

を考え，その上の非退化対称形式 $(|)$ を

$$\begin{array}{llll}(\varepsilon_i|\varepsilon_j)=\delta_{ij}, & (\varepsilon_i|\delta)=(\varepsilon_i|\Lambda)=0, & (\delta|\Lambda)=1, & (\delta|\delta)=(\Lambda|\Lambda)=0,\\ (\varepsilon_i^\vee|\varepsilon_j^\vee)=\delta_{ij}, & (\varepsilon_i^\vee|c)=(\varepsilon_i^\vee|d)=0, & (c|d)=1, & (c|c)=(d|d)=0\end{array}$$

で定める．

$$\alpha_{ij}=\varepsilon_i-\varepsilon_j,\ (1\leq i\neq j\leq n)\quad \alpha_i=\alpha_{ii+1}\ (1\leq i\leq n-1)$$

とおくと，A_{n-1} 型ルート系

$$R=\{\alpha_{ij}|1\leq i\neq j\leq n\}\subset\mathfrak{h}^*,\ R^+=\{\alpha_{ij}\in R|i<j\},\ \Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\}$$

が定まる．さらに $\alpha_0=-\alpha_{1n}+\delta$ とおくとき，$A_{n-1}^{(1)}$ 型 affine ルート系

$$\begin{aligned}\widehat{R}&=\{\alpha+k\delta|\alpha\in R,\ k\in\mathbb{Z}\}\subset\mathfrak{h}^*,\\ \widehat{R}^+&=\{\alpha+k\delta|\alpha\in R^+,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}\sqcup\{-\alpha+k\delta|\alpha\in R^+,\ k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\},\\ \widehat{\Pi}&=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\}\end{aligned}$$

が定まる．$P,P^\vee$ を

$$P=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\varepsilon_i\subset\mathfrak{h}^*,\quad P^\vee=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\varepsilon_i^\vee\subset\mathfrak{h}$$

で定まる weight 格子,coweight 格子とする．

定義 2.1. $A_{n-1}^{(1)}$ 型拡大 affine Weyl 群 W_n は，次の生成元と基本関係式で定義される；

$$\begin{array}{lll}\text{生成元} & : & s_0,s_1,\cdots,s_{n-1},\pi^{\pm 1},\\ \text{関係式} & : & s_i^2=1\quad (0\leq i\leq n-1),\\ & & s_is_{i+1}s_i=s_{i+1}s_is_{i+1}\quad (i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},n>2),\\ & & s_is_j=s_js_i\quad (j\not\equiv i,i\pm 1),\\ & & \pi s_i=s_{i+1}\pi\quad (i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),\\ & & \pi^{-1}\pi=\pi\pi^{-1}=1.\end{array}$$

このとき，W_n の $\mathfrak{h}^*, \mathfrak{h}$ への作用は

$$
\begin{array}{ll}
s_i(h) = h - (\alpha_i|h)\alpha_i \quad (h \in \mathfrak{h}^*) & s_i(h^\vee) = h^\vee - \langle \alpha_i | h^\vee \rangle \alpha_i^\vee \quad (h^\vee \in \mathfrak{h}) \\
\pi(\varepsilon_i) = \varepsilon_{i+1} \quad (1 \le i \le n-1) & \pi(\varepsilon_i^\vee) = \varepsilon_{i+1}^\vee \quad (1 \le i \le n-1) \\
\pi(\varepsilon_n) = \varepsilon_n - \delta & \pi(\varepsilon_n^\vee) = \varepsilon_n^\vee - c \\
\pi(\Lambda) = \Lambda & \pi(c) = c \\
\pi(\delta) = \delta & \pi(d) = d
\end{array}
$$

で与えられる．

2.1 double affine Hecke algebra of type GL_n

以下，$\mathbb{K} = \mathbb{C}(\zeta, \tau)$ とおく．

定義 2.2. GL_n 型 double affine Hecke algebra $\mathcal{H}_n$ とは，生成元

$$T_i \ (0 \le i \le n-1), \quad Y_\eta \ (\eta \in P \oplus \mathbb{Z}\delta), \quad \pi^{\pm 1}$$

と基本関係式

$$
\begin{array}{ll}
Y_\delta = \tau, & \\
(T_i - \zeta^{1/2})(T_i + \zeta^{-1/2}) = 0 & (0 \le i \le n-1), \\
T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} & (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \\
T_i T_j = T_j T_i & (\text{otherwise}), \\
T_i Y_\eta - Y_{s_i(\eta)} T_i = (\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2}) \dfrac{Y_{s_i\eta} - Y_\eta}{Y_{\alpha_i} - 1} & (0 \le i \le n-1), \\
\pi T_i = T_{i+1} \pi & (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \\
\pi Y_\eta = Y_{\pi(\eta)} \pi, & \\
Y_\eta Y_\xi = Y_{\eta + \xi}. &
\end{array}
$$

で定義される $\mathbb{K}$ 上の結合代数である．

ここで，$Y_i = Y_{\varepsilon_i}, X_1 = T_1 \cdots T_{n-1} \pi^{-1}, \quad X_i = \pi^{i-1} X_1 \pi^{-i+1}$ とおくことで，生成元と

基本関係式の別の表示

$$
\begin{array}{lll}
\text{生成元：} & T_i \ (1 \le i \le n-1), \quad Y_j^{\pm 1}, X_j^{\pm 1} \ (1 \le j \le n), & \\
\text{基本関係式：} & (T_i - \zeta^{1/2})(T_i + \zeta^{-1/2}) = 0 & (1 \le i \le n-1), \\
& T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} & (1 \le i \le n-1), \\
& T_i T_j = T_j T_i & (|i-j| \ge 2), \\
& T_i X_{i+1} T_i = X_i & (1 \le i \le n-1), \\
& T_i X_j = X_j T_i & (j \ne i, i+1), \\
& T_i Y_i T_i = Y_{i+1} & (1 \le i \le n-1), \\
& T_i Y_j = Y_j T_i & (j \ne i, i+1), \\
& X_2^{-1} Y_1 X_2 Y_1^{-1} = T_1^2, & \\
& X_j \left(\prod_{k=1}^{n} Y_k \right) = \tau \left(\prod_{k=1}^{n} Y_k \right) X_j & (1 \le j \le n), \\
& Y_j \left(\prod_{k=1}^{n} X_k \right) = \tau \left(\prod_{k=1}^{n} X_k \right) Y_j & (1 \le j \le n), \\
& X_i X_j = X_j X_i, X_i X_i^{-1} = 1 & (1 \le i, j \le n), \\
& Y_i Y_j = Y_j Y_i, Y_i Y_i^{-1} = 1 & (1 \le i, j \le n).
\end{array}
$$

が得られる．

なお，$H_n = \langle T_1, \cdots, T_{n-1} \rangle$ は A 型 Iwahori-Hecke 環，$H_n^{\mathrm{aff}} = \langle T_1, \cdots, T_{n-1}, Y_1^{\pm 1}, \cdots, Y_n^{\pm 1} \rangle$ は GL_n 型 affine Hecke 環に同型な部分環である．$\langle T_1, \cdots, T_{n-1}, X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1} \rangle$ も GL_n 型 affine Hecke 環に同型である．

2.2 多項式表現

命題 2.3.

(1) $\mathcal{H}_n$ の $\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}]$ 上の忠実な表現 V_n が

$$
\begin{aligned}
X_j &\mapsto x_j \ (\text{multiplication}), \\
T_i &\mapsto \zeta^{1/2} s_i + \frac{\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2}}{x_{i+1} x_i^{-1} - 1}(s_i - 1), \\
Y_j &\mapsto T_j^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} \omega T_1 \cdots T_{j-1},
\end{aligned}
$$

で定まる．ここで，s_i は変数 x_i と x_{i+1} の置換，ω は $(\omega f)(x_1, \cdots, x_n) = f(\tau^{-1} x_n, x_1, \cdots, x_{n-1})$ で作用する．

(2) この表現は，GL_n 型 affine Hecke 環 H_n^{aff} の 1 次元表現

$$
T_i \mapsto \zeta^{1/2}, \quad Y_j \mapsto \zeta^{\rho_j}.
$$

の誘導表現に同型である．ここで

$$
\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_n) = \left(-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-3}{2}, \cdots, \frac{n-1}{2} \right).
$$

とする．

Remark 2. ζ, τ が generic なら，この表現は既約かつ可換な作用素 Y_j $(1 \le j \le n)$ が同時対角化可能に作用する．その同時固有ベクトルが non-symmetric Macdonald 多項式である [笠谷].

2.3 笠谷予想

$\mathcal{H}_n$ のパラメータを

$$\zeta^\ell \tau^r = 1 \quad (2 \le \ell \le n,\ 1 \le r,\ (\ell, r) = 1).$$

と特殊化した場合の多項式表現を $V_n^{(\ell,r)}$ とかく．

定義 2.4. $\mathbb{K}^n$ の部分集合 $Z_m^{(\ell,r)}$ とは，次の条件を満たす $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ からなる；

相異なる z の添え字 $i_{j,1}, \cdots, i_{j,\ell} \in \{1, \cdots, n\}$ $(1 \le j \le m)$ と非負整数 $s_{j,1}, \cdots, s_{j,\ell} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ $(1 \le j \le m)$ が存在して，

$$\begin{aligned} &z_{i_{j,a}} = \zeta \tau^{s_{j,a}} z_{i_{j,a+1}} \quad (1 \le j \le m,\ 1 \le i \le \ell), \\ &\sum_{a=1}^{\ell} s_{j,a} = r \quad (1 \le j \le m), \\ &i_{j,a+1} > i_{j,a} \text{ if } s_{j,a} = 0. \end{aligned}$$

を満たす.

このとき，イデアル $I_m^{(\ell,r)}$ を

$$I_m^{(\ell,r)} = \{f \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}]; f(z) = 0 \text{ for all } z \in Z_m^{(\ell,r)}\}$$

で定義する．この定義式を multi-wheel 条件と呼ぶ.

定理 2.5 ([笠谷, Theorem 6.3]). $N = \left[\frac{n}{\ell}\right]$ とおく．このとき，

$$0 = I_0^{(\ell,r)} \subsetneq I_1^{(\ell,r)} \subsetneq I_2^{(\ell,r)} \subsetneq \cdots I_N^{(\ell,r)} \subsetneq I_{N+1}^{(\ell,r)} = V_n^{(\ell,r)}.$$

は，$V_n^{(\ell,r)}$ の部分表現の増大列である.

この定理 2.5 から，$V_n^{(\ell,r)}$ の組成因子の個数は，$N + 1 = \left[\frac{n}{\ell}\right] + 1$ 個以上である.

予想 2.6 ([笠谷, Conjecture 6.4]). 前定理で構成した $V_n^{(\ell,r)}$ の部分表現の増大列が組成列であろう．すなわち $I_{a+1}^{(\ell,r)}/I_a^{(\ell,r)}$ $(0 \le a \le N)$ は既約.

2.4 category $\mathcal{O}$

$\mathcal{H}_n$-mod を有限生成 $\mathcal{H}_n$-加群の圏とし，$\mathbb{C}[Y]$ を Y_η $(\eta \in P)$ で生成される $\mathcal{H}_n$ の部分環とする.

定義 2.7. $M \in \mathcal{H}_n$-mod に対し，$\mathbb{C}[Y]$ が局所有限に作用するとは，任意の $v \in M$ に対し，$\mathbb{C}[Y]v$ が有限次元となることを言う．$\mathbb{C}[Y]$ が局所有限に作用する $\mathcal{H}_n$-加群からなる充満部分圏を，category $\mathcal{O}$ という．$\mathcal{H}_n$ のパラメータを特殊化した場合の category $\mathcal{O}$ を，特に $\mathcal{O}_{(\ell,r)}$ とかく．$V_n^{(\ell,r)}$ は category $\mathcal{O}_{(\ell,r)}$ に属す．

$M \in \mathcal{O}$ とするとき，広義 weight 分解 $M = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{h}^*} M_\chi$ が存在する．ここで

$$M_\chi = \bigcup_{k \geq 1} \{v \in M | (Y_\eta - \zeta^{(\eta|\chi)})^k v = 0 \text{ for any } \eta \in P\}$$

である．$\mathrm{Supp}(M) = \{\chi \in \mathfrak{h}^* | M_\chi \neq 0\}$ とおく．

定義 2.8. $\mathrm{Supp}(M) \subset W_n \cdot \chi$ となるような $M \in \mathcal{O}$ からなる充満部分圏を ${}^\chi\mathcal{O}$ とかく．パラメータを特殊化した場合には，${}^\chi\mathcal{O}_{(\ell,r)}$ とかく．$\mathcal{H}_n^{(\ell,r)}$ の多項式表現 $V_n^{(\ell,r)}$ は，${}^\chi\mathcal{O}_{(\ell,r)}$ に属す．

3 DAHA の退化と v-Schur 環

3.1 degenerate DAHA と category $\mathbb{O}^{\mathrm{deg}}$

3.1.1 degenerate DAHA

定義 3.1. $h \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ とする．GL_n 型 degenerate DAHA $\mathbb{H}_{n,h}^{\mathrm{deg}}$ とは，

$$\pi^{\pm 1}, s_0, s_1, \cdots s_{n-1}, \quad y_\eta^{\mathrm{deg}} \ (\eta \in P \oplus \mathbb{Z}\delta)$$

を生成元とし，基本関係式

$$\begin{aligned}
&y_\delta^{\mathrm{deg}} = 1, \\
&y_\eta^{\mathrm{deg}} + y_\xi^{\mathrm{deg}} = y_{\eta+\xi}^{\mathrm{deg}} && (\eta, \xi \in P), \\
&\langle \pi^{\pm 1}, s_0, s_1, \cdots, s_{n-1} \rangle \cong \mathbb{C}W_n, \\
&s_i y_\eta^{\mathrm{deg}} - y_{s_i\eta}^{\mathrm{deg}} s_i = h \frac{y_{s_i\eta}^{\mathrm{deg}} - y_\eta^{\mathrm{deg}}}{y_{\alpha_i}} && (0 \leq i \leq n-1, \ \eta \in P), \\
&\pi y_\eta^{\mathrm{deg}} = y_{\pi\eta}^{\mathrm{deg}} \pi,
\end{aligned}$$

で定義される $\mathbb{C}$ 上の結合代数である．

3.1.2 category $\mathbb{O}^{\mathrm{deg}}$

定義 3.2. $\mathbb{H}_{n,h}^{\mathrm{deg}}$-mod を有限生成 $\mathbb{H}_{n,h}^{\mathrm{deg}}$-加群の圏とし，$\mathbb{C}[y^{\mathrm{deg}}]$ を y_η^{deg} $(\eta \in P)$ で生成される部分環とする．$\mathbb{C}[y^{\mathrm{deg}}]$ が局所有限に作用するような $\mathbb{H}_{n,h}^{\mathrm{deg}}$-mod の元からなる充満部分圏を category $\mathbb{O}_h^{\mathrm{deg}}$ という．

$M \in \mathbb{O}_h^{\deg}$ の広義 weight 分解を $M = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{h}^*} M_\chi$ とする．ここで

$$M_\chi = \bigcup_{k \geq 1} \{v \in M | (y_\eta - (\eta|\chi))^k v = 0 \text{ for any } \eta \in P\}$$

である．$\mathrm{Supp}(M) = \{\chi \in \mathfrak{h}^* | M_\chi \neq 0\}$ とおく．

定義 3.3. $\mathrm{Supp}(M) = \{\chi \in \mathfrak{h} | M_\chi \neq 0\} \subset W_n \cdot \chi$ を満たすような $M \in \mathbb{O}_h^{\deg}$ からなる充満部分圏を ${}^\chi\mathbb{O}_h^{\deg}$ とかく．

3.1.3 標準加群

n の分割 λ に対応する n 次対称群の表現を S^λ とかく．

定義 3.4. S^λ を

$$y_i^{\deg} \mapsto \sum_{j<i} s_{ji} - \frac{n-1}{2}.$$

によって $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \otimes \mathbb{C}[y^{deg}]$-加群とみなす．このとき，標準加群 $\Delta_h^{\deg}(\lambda)$ とは，誘導表現

$$\Delta_h^{\deg}(\lambda) = \mathrm{Ind}_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \otimes \mathbb{C}[y^{\deg}]}^{\mathbb{H}_n^{\deg}} S^\lambda.$$

のことを言う．$\Delta_h^{\deg}(\lambda)$ は category $\mathbb{O}_h^{\deg}$ に属す．

特に，$\Delta_h^{\deg}(\mathrm{triv})$ が ${}^\rho\mathbb{O}_h^{\deg}$ に属すことに注意する．ここで

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i \varepsilon_i = (\rho_1, \cdots, \rho_n) = \left(-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-3}{2}, \cdots, \frac{n-1}{2}\right)$$

であった．

3.2 rational DAHA と category $\mathbb{O}^{\mathrm{rat}}$

3.2.1 rationa DAHA

定義 3.5. $h \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ とする．GL_n 型 rational DAHA $\mathbb{H}_{n,h}^{\mathrm{rat}}$ とは

$$x_{\eta^\vee}\ (\eta^\vee \in P^\vee), \quad s_1, \cdots, s_{n-1}, \quad y_\eta^{\mathrm{rat}}\ (\eta \in P)$$

を生成元とし，基本関係式

$$\begin{aligned}
&y_\eta^{\mathrm{rat}} + y_\xi^{\mathrm{rat}} = y_{\eta+\xi}^{\mathrm{rat}} && (\eta, \xi \in P)\\
&x_{\eta^\vee} + x_{\xi^\vee} = x_{\eta^\vee + \xi^\vee} && (\eta^\vee, \xi^\vee \in P^\vee)\\
&\langle s_1, \cdots, s_{n-1}\rangle \cong \mathbb{C}\mathfrak{S}_n, &&\\
&w x_{\eta^\vee} = x_{w\eta^\vee} w && (w \in \mathfrak{S}_n),\\
&w y_\eta^{\mathrm{rat}} = y_{w\eta}^{rat} w, &&
\end{aligned}$$

$$[x_i, y_j^{\mathrm{rat}}] = \begin{cases} h s_{ij} & (\text{if } i \neq j)\\ 1 - h\sum_{k \neq i} s_{ik} & (\text{if } i = j)\end{cases}$$

で定義される $\mathbb{C}$ 上の結合代数である.

3.2.2 category $\mathbb{O}^{\mathrm{rat}}$ と標準加群

定義 3.6. $\mathbb{H}^{\mathrm{rat}}_{n,h}$-mod を有限生成 $\mathbb{H}^{\mathrm{rat}}_{n,h}$-加群の圏とする. $M \in \mathbb{H}^{\mathrm{rat}}_{n,h}$-mod に対して, y^{rat} が局所冪零に作用するとは, 任意の $v \in M$ に対して, $(y_j^{\mathrm{rat}})^N v = 0$ $(N \gg 0, 1 \leq j \leq n)$ が成り立つときを言う. y^{rat} が局所冪零に作用する $\mathbb{H}^{\mathrm{rat}}_{n,h}$-mod の元からなる充満部分圏を category $\mathbb{O}^{\mathrm{rat}}_h$ という.

n の分割 λ に対応する n 次対称群の表現 S^λ を考える.

定義 3.7. S^λ を

$$y_j^{\mathrm{rat}} S^\lambda = 0 \ (1 \leq j \leq n)$$

によって $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \otimes \mathbb{C}[y^{\mathrm{rat}}]$-加群とみなす. このとき標準加群 $\Delta^{\mathrm{rat}}_h(\lambda)$ とは, 誘導加群

$$\Delta^{\mathrm{rat}}_h(\lambda) = \mathrm{Ind}^{\mathbb{H}^{\mathrm{rat}}_n}_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \otimes \mathbb{C}[y^{\mathrm{rat}}]} S^\lambda$$

のことを言う. $\Delta^{\mathrm{rat}}_h(\lambda)$ は category $\mathbb{O}^{\mathrm{rat}}_h$ に属す.

3.2.3 degenerate DAHA への埋め込み

命題 3.8 ([鈴木]). 次で定義される $\mathbb{H}^{\mathrm{rat}}_{n,h}$ から $\mathbb{H}^{\mathrm{rat}}_{n,h}$ への準同型は単射；

$$\begin{aligned} s_i &\mapsto s_i, \\ x_j^\vee &\mapsto X_j \\ y_j^{\mathrm{rat}} &\mapsto X_j^{-1}\left(y_j^{\mathrm{deg}} - \sum_{1 \leq k < j} s_{kj} + \frac{n-1}{2}\right). \end{aligned}$$

ここで, $X_1 = \pi s_{n-1} \cdots s_1, X_j = \pi^{j-1} X_1 \pi^{-j+1}$ である.

特に,

$$y_j^{\mathrm{deg}} = X_j y_j^{\mathrm{rat}} + \sum_{1 \leq k < j} s_{kj} - \frac{n-1}{2}$$

なので, y_j^{rat} が 0 で作用しているとき, y_j^{deg} は ρ_j で作用していることに注意する.

3.3 v-Schur 環

H_n を v をパラメータとする A 型 Hecke 環とする. n の composition $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ に対し, Young 部分群 $\mathfrak{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_n}$ を考える. $m_\mu = \sum_{w \in \mathfrak{S}_\mu} T_w \in H_n$ とおくとき, 左 H_n-加群

$$M = \bigoplus_\mu H_n m_\mu$$

を permutation module という．v-Schur 環 $\mathbb{S}(n)$ とは，

$$\mathbb{S}(n) = \mathrm{End}_{H_n}(M)$$

で定義される [DJ]．自然な函手

$$\mathcal{S} : \mathbb{S}(n)\text{-mod} \to H_n\text{-mod}; N \mapsto M \otimes_{\mathbb{S}(n)} N$$

を考えることができる．v が 1 のベキ根でないとき，$\mathbb{S}(n)$ は既約表現の完全代表系 $\{W^\lambda | \lambda \vdash n\}$ を持ち，$S^\lambda = M \otimes_{\mathbb{S}(n)} W^\lambda$ が成り立つ．v が 1 のベキ根のときは，$\mathbb{S}(n)$ が cellular algebra であること [GL] を使って，$\{L^\lambda := W^\lambda / \mathrm{rad}\, W^\lambda | \lambda \vdash n\}$ が既約表現の完全代表系を与える．

他方，$U_v(\mathfrak{gl}_n)$ のベクトル表現 $\mathbb{C}^n$ のテンソル積表現 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ に対し，$U_v(\mathfrak{gl}_n) \to \mathrm{End}((\mathbb{C}^n)^{\otimes n})$ の像が $\mathbb{S}(n)$ と同型になることが示されている [BLM]．

特に，これらの対応で，$\mathbb{S}(n)$-加群 $W^{(1^n)}$ は，$U_v(\mathfrak{gl}_n)$ の determinant 表現，対称群の符号表現にそれぞれ対応している．

3.4 $\mathcal{O}, \mathbb{O}^{\mathrm{deg}}, \mathbb{O}^{\mathrm{rat}}, \mathbb{S}(n)$-mod の関係

ここまでに導入した 4 つの圏の同値性に関する結果をまとめて述べる．

定理 3.9 ([VV2],[Lus]). $\chi \in \mathfrak{h}^*$ が条件

$$\text{任意の} \eta \in P \text{ に対し } (\eta|\chi) \in \mathbb{Z} \text{ かつ } (\delta|\chi) \in \mathbb{Z},$$

を満たすとき，圏 ${}^\chi\mathcal{O}_{(\ell,r)}$ と ${}^\chi\mathbb{O}^{\mathrm{deg}}_{r/\ell}$ は圏同値．さらにこの圏同値により，DAHA $\mathcal{H}_n^{(\ell,r)}$ の多項式表現 $V_n^{(\ell,r)}$ は，$\mathbb{H}^{\mathrm{deg}}_{n.r/\ell}$ の標準加群 $\Delta_h^{\mathrm{deg}}(\mathrm{triv})$ に対応する．

定理 3.10 ([鈴木]).
(1) 標準加群 $\Delta_h^{\mathrm{deg}}(\lambda), \Delta_h^{\mathrm{rat}}(\lambda)$ は unique simple quotient を持つ．それらを $L_h^{\mathrm{deg}}(\lambda), L_h^{\mathrm{rat}}(\lambda)$ とかく．
(2) 埋め込み $\mathbb{H}^{\mathrm{rat}}_{n,h} \hookrightarrow \mathbb{H}^{\mathrm{deg}}_{n,h}$ から自然に定義される誘導函手

$$\mathbb{O}_h^{\mathrm{rat}} \to \mathbb{O}_h^{\mathrm{deg}}; M \mapsto \mathbb{H}^{\mathrm{deg}}_{n,h} \otimes_{\mathbb{H}^{\mathrm{rat}}_{n,h}} M$$

は fully faithful かつ完全．
(3) (2) の誘導函手は標準加群を標準加群に移し，その unique simple quotient を unique simple quotient に移す；

$$\Delta^{\mathrm{deg}}(\lambda) = \mathbb{H}^{\mathrm{deg}}_{n,h} \otimes_{\mathbb{H}^{\mathrm{rat}}_{n,h}} \Delta^{\mathrm{rat}}(\lambda), \quad L^{\mathrm{deg}}(\lambda) = \mathbb{H}^{\mathrm{deg}}_{n,h} \otimes_{\mathbb{H}^{\mathrm{rat}}_{n,h}} L^{\mathrm{rat}}(\lambda).$$

特に，$[\Delta^{\mathrm{deg}}(\lambda) : L^{\mathrm{deg}}(\mu)] = [\Delta^{\mathrm{rat}}(\lambda) : L^{\mathrm{rat}}(\lambda)]$.

定理 3.11 ([Rou]). $v = \sqrt[\ell]{1}$ のとし，$\mathbb{S}(n)$-mod を考える．$h \neq \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ならば，圏 $\mathbb{O}_h^{\mathrm{rat}}$ と圏 $\mathbb{S}(n)$-mod は圏同値で，$h > 0$ のとき，標準加群 $\Delta_h^{\mathrm{rat}}(\lambda)$ は，Weyl 加群 $W^{\lambda'}$ に移る．ここで，λ' は λ の転置である．

4 v-Schur 環における LLT-有木型定理

4.1 量子展開環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ と Fock 空間

4.1.1 量子展開環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$

$[n] = \dfrac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$ とおく．$A = (a_{ij})_{0 \le i \le \ell-1}$ を $A^{(1)}_{\ell-1}$ 型 Cartan 行列，すなわち，$\ell \ge 3$ のとき

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & i \equiv j \pm 1 (\operatorname{mod} \ell) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$\ell = 2$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ とする．

定義 4.1. 量子展開環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ とは，生成元

$$E_i, F_i, K_i \quad (0 \le i \le \ell - 1),$$

と基本関係式

$$\begin{aligned}
&K_iK_j = K_jK_i,\\
&K_iE_j = q^{a_{ij}}E_jK_i,\\
&K_iF_j = q^{-a_{ij}}F_jK_i,\\
&E_iF_j - F_jE_i = \delta_{i,j}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}},\\
&E_iE_j = E_jE_i \quad (\text{if } i \ne j \pm 1),\\
&F_iF_j = F_jF_i \quad (\text{if } i \ne j \pm 1),
\end{aligned}$$

および q-Serre 関係式

$$\begin{aligned}
\text{if } \ell \ge 3, \quad & E_i^2E_{i\pm1} - (q + q^{-1})E_iE_{i\pm1}E_i + E_{i\pm1}E_i^2 = 0,\\
& F_i^2F_{i\pm1} - (q + q^{-1})F_iF_{i\pm1}F_i + F_{i\pm1}F_i^2 = 0,\\
\text{if } \ell = 2, \quad & E_i^3E_{i\pm1} - [3]E_i^2E_{i\pm1}E_i + [3]E_iE_{i\pm1}E_i^2 - E_{i\pm1}E_i^2 = 0,\\
& F_i^3F_{i\pm1} - [3]F_i^2F_{i\pm1}F_i + [3]F_iF_{i\pm1}F_i^2 - F_{i\pm1}E_i^2 = 0,
\end{aligned}$$

で定義される $\mathbb{C}(q)$ 上の結合代数である．(基本関係式の添え字は $\operatorname{mod} \ell$ で考える.)

$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ は，次の余積で Hopf 代数となる；

$$\begin{aligned}
\Delta^-(E_i) &= 1 \otimes E_i + E_i \otimes K_i^{-1},\\
\Delta^-(F_i) &= F_i \otimes 1 + K_i \otimes F_i,\\
\Delta^-(K_i) &= K_i \otimes K_i.
\end{aligned}$$

別の余積

$$\begin{aligned}\Delta^+(E_i) &= E_i\otimes 1 + K_i\otimes E_i,\\ \Delta^+(F_i) &= F_i\otimes K_i^{-1} + 1\otimes F_i,\\ \Delta^+(K_i) &= K_i\otimes K_i.\end{aligned}$$

もあり，こちらは後で upper 大域基底の計算に利用する．

4.1.2 Fock 空間

$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ の Fock 空間を [KMS] に従って導入する．$V=\mathbb{C}^\ell$ の基底を $v_1,\cdots,v_\ell$ とし，$V(z)=V\otimes\mathbb{C}(q)[z,z^{-1}]$ の基底を $u_{j-a\ell}=z^a v_j$ ととる．このとき，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ の作用が

$$\begin{aligned}E_i u_m &= \delta(m-1\equiv i \mod \ell)u_{m-1},\\ F_i u_m &= \delta(m\equiv i \mod \ell)u_{m+1},\\ K_i u_m &= q^{\delta(m\equiv i \mod \ell)-\delta(m\equiv i+1 \mod \ell)}u_m.\end{aligned}$$

で定義される．$V(z)$ を evaluation module という．

$I=(\cdots,i_2,i_1,i_0)$ を

$$i_0>i_1>i_2>\cdots,\quad i_k=-k+1\ (k\gg 0)$$

を満たす整数の半無限列とし，

$$u_I=\cdots\wedge u_{i_2}\wedge u_{i_1}\wedge u_{i_0}.$$

とおく．ここで wedge 積は

$$\begin{aligned}u_k\wedge u_m &= -u_m\wedge u_k \quad (k\equiv m \mod \ell),\\ u_k\wedge u_m &= -qu_m\wedge u_k\\ &\quad +(q^2-1)\left\{u_{m-i}\wedge u_{k+i}-qu_{m-\ell}\wedge u_{k+\ell}+q^2u_{m-\ell+i}\wedge u_{k+\ell+i}-\cdots\right\}\\ &\qquad (m-k\equiv i \mod \ell, 0<i<\ell).\end{aligned}$$

と定義する．さらに，

$$\mathrm{vac}_{-k}=\cdots\wedge u_{-(k+2)}\wedge u_{-(k+1)}\wedge u_{-k}.$$

とおき，

$$E_i\,\mathrm{vac}_{-k} = 0, \tag{4.1}$$

$$F_i\,\mathrm{vac}_{-k} = \begin{cases}\mathrm{vac}_{-k-1}\wedge u_{-k+1} & (i\equiv -k \mod \ell)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}, \tag{4.2}$$

$$K_i\,\mathrm{vac}_{-k} = \begin{cases}q\,\mathrm{vac}_{-k} & (i\equiv -k \mod \ell)\\ \mathrm{vac}_{-k} & \text{otherwise}\end{cases}, \tag{4.3}$$

によって $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ の作用を定義する．

定義 4.2. $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ の Fock 空間とは，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$-加群

$$\mathcal{F} = \bigoplus_I \mathbb{C}(q) u_I,$$

のことを言う．ここで I は，$i_k = -k+1$ $(k \gg 0)$ を満たす半無限列すべてを動く．

命題 4.3. $\mathcal{F}$ は，対応

$$|\lambda = (\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots)\rangle \mapsto \cdots u_{\lambda_2 - 2} \wedge u_{\lambda_1 - 1} \wedge u_{\lambda_0}.$$

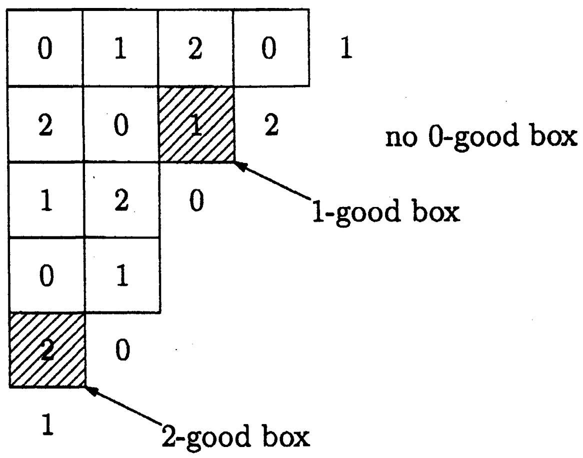
により，Fock 空間の林実現 (e.g. [有木 2]) に一致する．以下，適宜この同一視で $\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{C}(q)|\lambda\rangle$ とみなす．

4.2 Fock 空間の結晶基底—Misra-三輪の定理—

まず組み合わせ論的な用語を定義する．$\mathcal{P}$ を分割全体の集合とする．

定義 4.4.
(1) 分割 λ に対し，$x \in \lambda$ の content とは $c(x) = \mathrm{col}(x) - \mathrm{row}(x)$ のことをいい，$c(x) \bmod \ell$ を x の ℓ-residue という．
(2) 分割 μ が，分割 λ から x を除去して得られるとき，x は λ の removable box であるという．逆に，λ が μ に x を付加して得られる場合，x は μ の addable box であるという．ℓ-residue が i の removable box[resp.addable box] を i-removable box[resp.i-addable box] という．
(3) λ の i-addable box と i-removable box を下から上へ読み出してできる A, R の列から，AR の組を取り除けるだけ取り除いて出来る $R \cdots RA \cdots A$ の形の列を考える．この列の最も右にある R に対応する i-removable box を i-good box という．

$\lambda = (4,3,2,2,1)$, $\ell = 3$



R を 0 に極を持たない有理関数からなる $\mathbb{C}(q)$ の部分環とする．

$$L = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} R|\lambda\rangle, \quad B = \{|\lambda\rangle \ (\mathrm{mod}\, qL)\}.$$

とおく．

定理 4.5 (Misra-三輪 [MM],[有木 2]). (L, B) は，次で定義される柏原作用素 $\widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i$ $(1 \le i \le \ell - 1)$ により，Fock 空間 $\mathcal{F}$ の結晶基底となる；
(1) λ が i-good box を持たないとき，$\widetilde{e}_i|\lambda\rangle = 0 \ (\mathrm{mod}\, qL)$.
(2) x が λ の i-good box のとき，$\mu = \lambda \backslash \{x\}$ とし，

$$\widetilde{e}_i|\lambda\rangle = |\mu\rangle \ (\mathrm{mod}\, qL), \quad \widetilde{f}_i|\mu\rangle = |\lambda\rangle. \ (\mathrm{mod}\, qL).$$

(3) $\mu \cup \{x\}$ において x が i-good box となるような i-addable box x が μ に存在しないとき，$\widetilde{f}_i|\mu\rangle = 0 \ (\mathrm{mod}\, qL)$.

4.3 Fock 空間の大域基底

定義 4.6. [KMS] に従って，$\mathcal{F}$ 上の作用素 B_k $(k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$ を次で定義する；

$$B_k u_I = (\cdots \wedge u_{i_2} \wedge u_{i_1} \wedge u_{i_0 - \ell k}) + (\cdots \wedge u_{i_2} \wedge u_{i_1 - \ell k} \wedge u_{i_0}) + (\cdots \wedge u_{i_2 - \ell k} \wedge u_{i_1} \wedge u_{i_0}) + \cdots.$$

4.3.1 lower 大域基底

命題 4.7. 次を満たす $\mathcal{F}$ 上の bar involution $^{-} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ が一意的に存在する；
(1) $\overline{F_i v} = F_i \overline{v} \quad (v \in \mathcal{F},\ 0 \le i \le \ell - 1)$,
(2) $\overline{B_k v} = B_k \overline{v} \quad (k > 0)$,
(3) $\overline{\mathrm{vac}_0} = \mathrm{vac}_0$.
(4) $\overline{qv} = q^{-1}\overline{v}$.

定理 4.8. $\mathcal{F}$ 上の基底 $\{G^{\mathrm{low}}(\mu) \in \mathcal{F} | \mu \in \mathcal{P}\}$ であって，次の条件を満たすものが唯一つ存在する．この基底を $\mathcal{F}$ の lower 大域基底という．

(1) ("bar 不変性") $\overline{G^{\mathrm{low}}(\mu)} = G^{\mathrm{low}}(\mu)$.

(2) μ を n の分割とするとき，

$$G^{\mathrm{low}}(\mu) = |\mu\rangle + \sum_{\mu \lhd \lambda \in \mathcal{P}_n} d_{\lambda\mu}(q)|\lambda\rangle,$$

を満たす $d_{\lambda\mu}(q) \in q\mathbb{Z}[q]$ が存在する．ここで，順序 $\rhd$ は dominance ordering である．

4.3.2 upper 大域基底

$\{\langle\lambda|\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ を $\langle\lambda|\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$ に関する $\{|\lambda\rangle\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ の双対基底とする．このとき，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_\ell})$-加群

$$\mathcal{F}^\vee = \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}} \mathbb{C}(q)\langle\lambda|$$

は，余積 Δ^+ と (4.1),(4.2),(4.3) から定まる $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_\ell})$-加群 $\bigoplus_I \mathbb{C}(q)u_I$ に同型である．

命題 4.9. 次の条件を満たす $\mathcal{F}^\vee$ 上の bar invokution$^-$: $\mathcal{F}^\vee \to \mathcal{F}^\vee$ が唯一つ存在する；

(1) $\overline{F_i v} = F_i \overline{v} \quad (v \in \mathcal{F}^\vee,\ 0 \le i \le \ell-1)$,

(2) $\overline{B_k v} = B_k \overline{v} \quad (k < 0)$,

(3) $\overline{\mathrm{vac}_0} = \mathrm{vac}_0$.

(4) $\overline{qv} = q^{-1}\overline{v}$

定理 4.10. $\mathcal{F}^\vee$ の基底 $\{G^{\mathrm{up}}(\mu) \in \mathcal{F}^\vee | \mu \in \mathcal{P}\}$ であって，次の条件を満たすものが唯一つ存在する．この基底を $\mathcal{F}^\vee$ の upper 大域基底という．

(1) ("bar 不変性") $\overline{G^{\mathrm{up}}(\mu)} = G^{\mathrm{up}}(\mu)$.

(2) λ を n の分割とするとき，

$$\langle\lambda| = G^{\mathrm{up}}(\lambda) + \sum_{\lambda \rhd \mu \in \mathcal{P}_n} d_{\lambda\mu}(q) G^{\mathrm{up}}(\mu).$$

を満たす $d'_{\lambda\mu}(q) \in q\mathbb{Z}[q]$ が存在する．さらに，$d'_{\lambda\mu}(q)$ は $d_{\lambda\mu}(q)$ に一致する．特に，$\{G^{\mathrm{up}}(\mu)\}$ は $\{G^{\mathrm{low}}(\mu)\}$ の双対基底である．

4.4 LLT-有木型定理

Fock 空間における lower 大域基底と結晶基底の展開式

$$G^{\mathrm{low}}(\mu) = |\mu\rangle + \sum_{\mu \lhd \lambda \in \mathcal{P}_n} d_{\lambda\mu}(q)|\lambda\rangle,$$

の係数 $d_{\lambda\mu}(q)$ を，q-crystallized decomposition number と呼ぶ．v-Schur 環における LLT-有木型定理は，$q \to 1$ の特殊化で分解係数が得られることを主張している．

定理 4.11 (Varagnolo-Vasserot [VV1]). $d_{\lambda\mu}(1) = [W^{\lambda'}, L^{\mu'}]$ が成り立つ．

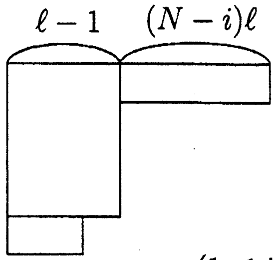
5 q-分解係数 $d_{(n),\mu}$

5.1 主定理

Fock 空間における大域基底に関する定理 4.8，定理 4.10 と Varagnolo-Vasserot による LLT-有木型定理により，$W^{(1^n)}$ の組成因子を計算するためには，$\langle(n)|$ の upper 大域基底に関する展開を計算すれば良いことが従う．

定義 5.1. $N = \left[\frac{n}{\ell}\right]$ とおき，n の分割 $\mu_i^{(n)}$ $(1 \leq i \leq N)$ を

$\mu_i^{(n)} =$

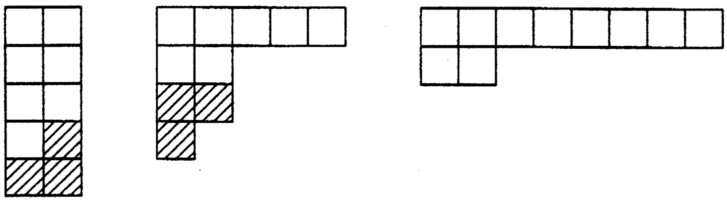


$(1 \leq i \leq N)$

の形で定義する．また $\mu_0^{(n)} = (n)$ とする．

Remark 3. ここで定義した一連の分割は，rim ℓ-hook を下から順に取り除いていくことにより得られる．

$$\mu_3^{(10)} = (2^5),\ \mu_2^{(10)} = (5, 2^2, 1),\ \mu_1^{(10)} = (8, 2),\ \mu_0^{(10)} = (10).$$



$\mu_3^{(10)}$ $\mu_2^{(10)}$ $\mu_1^{(10)}$

定理 5.2 (Enomoto). $\langle (n)|$ の upper 大域基底による展開は

$$\langle (n)| = \sum_{i=0}^{N} q^i G^{\mathrm{up}}(\mu_i^{(n)}),$$

となる．すなわち，$d_{(n),\mu}(q) = \begin{cases} q^i & \text{if } \mu = \mu_i^{(n)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ である．従って，分解係数について

$$[W^{(1^n)} : L^{\mu}] = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu' = \mu_i^{(n)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成立する．

5.1.1 証明のための補題

補題 5.3 (Kashiwara [柏原]). $E_i \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ の G^{up} への作用は

$$E_i G^{\mathrm{up}}(\mu) = [\varepsilon_i(\mu)] G^{\mathrm{up}}(\widetilde{e}_i \mu) + \sum_{\varepsilon_i(\nu) < \varepsilon_i(\mu) - 1} b_{\mu\nu}^i G^{\mathrm{up}}(\nu)$$

で与えられる．ここで，$\varepsilon_i(\mu) = \max\{k \geq 0 | \widetilde{e}_i^{\,k} \mu \neq 0\}$ である．特に，$\varepsilon_i(\mu) = 1$ なら，$E_i G^{\mathrm{up}}(\mu) = G^{\mathrm{up}}(\widetilde{e}_i \mu)$ が成り立つ．

補題 5.4. $x \in\in \bigcap_j \mathrm{Ker}(E_j) \subset \mathcal{F}^\vee$ とすると，x は G^{up} によって，$x = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} b_{x,\lambda} G^{\mathrm{up}}(\ell\lambda)$ と展開される．

補題 5.5 (Kashiwara [柏原]). 次の展開式が成り立つ；

$$\begin{aligned} & G^{\mathrm{low}}(\mathrm{vac}_{-m-1} \wedge u_{\ell\lambda_m - m} \wedge \cdots \wedge u_{\ell\lambda_1 - 1} \wedge u_{\ell\lambda_0}) \\ = & \sum a_{j_m, j_{m-1}, \cdots, j_0}(q)\, \mathrm{vac}_{-m-1} \wedge u_{j_m + \ell\lambda_m - \ell m} \wedge u_{j_{m-1} + \ell\lambda_{m-1} - \ell(m-1)} \wedge \cdots \wedge u_{j_0 + \ell\lambda_0} \end{aligned}$$

但し，和は

$$(0, \ell-1, 2(\ell-1), \cdots, m(\ell-1)) \leq (j_m, j_{m-1}, \cdots, j_0) \leq (m(\ell-1), (m-1)(\ell-1), \cdots, 0)$$

および

$$(-m, -m+1, \cdots, 0) \leq (j_m + \ell\lambda_m - \ell m, j_{m-1} + \ell\lambda_{m-1} - \ell(m-1), \cdots, j_0 + \ell\lambda_0)$$

を満たす $(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_0)$ をすべて動く．

系 5.6.
(1) $|(n)\rangle$ は $G^{\mathrm{low}}(\ell\lambda)$ $(\lambda \in \mathcal{P})$ の展開に現れない．
(2) $G^{\mathrm{up}}(\ell\lambda)$ は $\langle(n)|$ の展開に現れない．

補題 5.7. 柏原作用素 $\tilde{e}_i$ の $\mu_i^{(n)}$ への作用は次で与えられる．
(1) $n \not\equiv 0 \pmod{\ell}$ のとき，

$$\tilde{e}_j(\mu_i^{(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \not\equiv n-1 \\ \mu_i^{(n-1)} & \text{if } j \equiv n-1 \end{cases} \qquad (0 \leq i \leq N)$$

が成り立つ．
(2) $n \equiv 0 \pmod{\ell}$ のとき，

$$\tilde{e}_j(\mu_i^{(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \not\equiv n-1 \\ \mu_{i-1}^{(n-1)} & \text{if } j \equiv n-1 \end{cases} \qquad (1 \leq i \leq N)$$

および $\tilde{e}_j \mu_0^{(n)} = 0$ $(0 \leq j \leq \ell-1)$ が成り立つ．
(3) 特に

$$\varepsilon_j(\mu_i^{(n)}) = \begin{cases} 1 & \text{if } j \equiv n-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (1 \leq i \leq N)$$

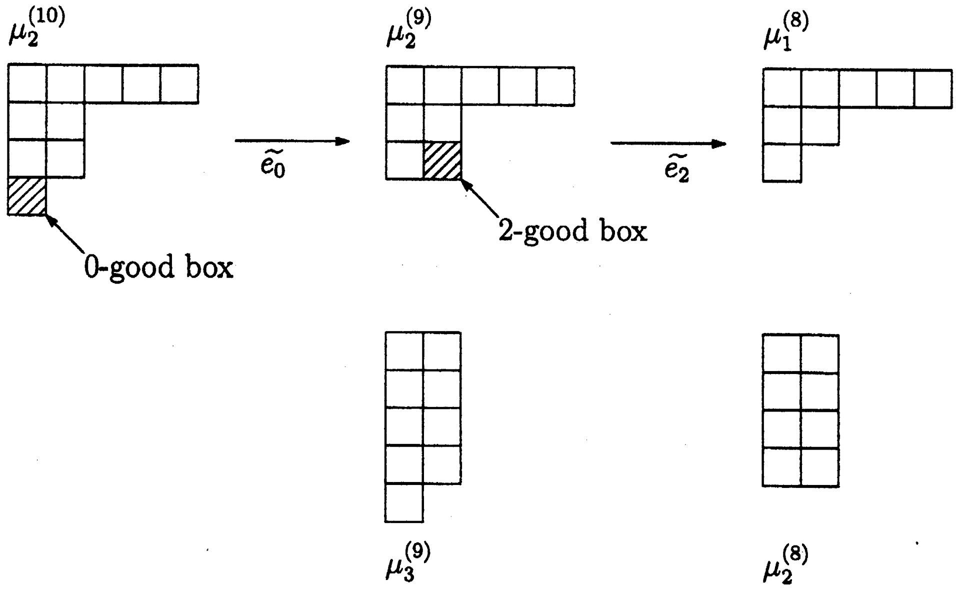
および

$$\varepsilon_j(\mu_0^{(n)}) = \begin{cases} 1 & \text{if } j \equiv n-1 \text{ and } n \not\equiv 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ．

例 5.8. $n = 10, \ell = 3$ の場合を考える.

$$\widetilde{e_0}\mu_2^{(10)} = (5,2,2) = \mu_2^{(9)},$$
$$\widetilde{e_0}\mu_2^{(9)} = (5,2,1) = \mu_1^{(8)}.$$



5.1.2 証明の方針

まず, 補題 5.3 と補題 5.7 を使って

$$D_n := \mathrm{vac}_{-1} \wedge u_n - \sum_{i=0}^{N} q^i G^{\mathrm{up}}(\mu_i^{(n)}) \in \bigcap_{j=0}^{\ell-1} \mathrm{Ker}(E_j)$$

を n に関する帰納法で証明する. すると補題 5.4 により D_n は $G^{\mathrm{up}}(\ell\lambda)$ で展開されるが, 系 5.6 により, $D_n = 0$ 以外は矛盾である.

参考文献

[有木 1] S. Ariki, "*On the decomposition numbers of the Hecke algebra of* $G(m,1,n)$", J. Math. Kyoto Univ. 36 (1996), no. 4, 789–808

[有木 2] S. Ariki, "*Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*", University Lecture Series, 26. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002

[BLM] A. Beilinson, G. Lusztig, R. MacPherson, "*A geometric setting for the quantum deformation of* GL_n", Duke math. J., 61, 1990, 655-677

[Ch] I. Cherednik, "*Double Affine Hecke Algebras*", London Mathematical Society Lecture Note Series, 2005

[DJ] R. Dipper, G. James, "*The q-Schur algebra*", Proc. AMS (3), 59, 1989, 23-50

[GGOR] V. Ginzburg, N. Guay, E. Opdam, R. Rouquier, "*On the category O for rational Cherednik algebras*", Invent. Math. 154 (2003), no. 3, 617–651, math.RT/0212036

[GL] J. Graham, G. Lehrer, "*Cellular algebras*", Invent. Math., 123, 1996, 1-34

[柏原] M. Kashiwara, "*On Level Zero Representations of Quantized Affine Algebras*", Duke Math. J. 112 (2002), no. 1, 117–175, math.QA/0010293

[笠谷] M. Kasatani, "*Subrepresentations in the Polynomial Representation of the Double Affine Hecke Algebra of type GL_n at $t^{k+1}q^{r-1} = 1$*", Int. Math. Res. Not. 2005, no. 28, 1717–1742, math.QA/0501272

[KMS] M. Kashiwara, T. Miwa, E. Stern, "*Decomposition of q-deformed Fock spaces*", Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), no. 4, 787–805, q-alg/9508006

[LLT] A. Lascoux, B. Leclerc, J. Thibon, "*Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*", Comm. Math. Phys. 181 (1996), no. 1, 205–263

[Lus] G. Lusztig, "*Affine Hecke algebras and their graded version*", J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), no. 3, 599–635

[Mat] A. Mathas, "*Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric groups*", University Lecture Series, 15. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999

[宮地] H. Miyachi, "*Unipotent Blocks of Finite General Linear Groups in Non-defining Characteristic*", unpublished

[MM] K. C. Misra, T. Miwa, "*Crystal base for the basic representation of $U_q(\widehat{sl}_n)$*", Comm. Math. Phys. 134, 79-88, 1990

[Rou] R. Rouquier, "*q-Schur algebras and complex reflection groups, I*", math.RT/0509252

[鈴木] T. Suzuki, "*Rational and trigonometric degeneration of the double affine Hecke algebra of type A*", IMRN 2005:37 (2005) 2249-2262, math.RT/0502534

[VV1] M. Varagnolo, E. Vasserot, "*On the decomposition matrices of the quantized Schur algebra*", Duke Math. J. 100 (1999), no. 2, 267–297, math.QA/9803023

[VV2] M. Varagnolo, E. Vasserot, "*From double affine Hecke algebras to quantized affine Schur algebras*", Int. Math. Res. Not. 2004, no. 26, 1299–1333, math.RT/0307047